© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2009 г.

УДК 517.53

О локальной и глобальной выпуклости регулярных областей в R^n

Зиновьев Б.С., канд. физ.-мат. наук, Соколов А.Б., ст. преп., Елкина Г.М., доц.

Предлагается подход к изложению условий выпуклости регулярных областей в R^n на основе понятия опорной гиперплоскости. Вводится класс квазивыпуклых функций, более широкий, чем класс выпуклых функций.

Ключевые слова: гиперплоскость, регулярные области, квадратичная форма, локальный экстремум.

On local and global convexity of regular domains in R^n

Zinov'yev B.S. cand. phys.-math. sci., Sokolov A.B., Yolkina G.M.

A new approach to introducing the conditions of the convexity of regular domains in R^n is given. The approach is based on the conception of the supporting hyperplane. A class ov quasi-convex functions is introduced; this class is wider than the well-known class of the convex functions.

Key words: hyperplane, regular domains, quadratic form, local extremum.

Обозначим через $<\bar{a},\bar{в}>=a_1в_1+\ldots+a_n\,в_n$ скалярное произведение векторов $\bar{a}(a_1 ... a_n)$ и $\bar{в}(в_1\ldots в_n)$.

Определение. Гиперплоскость П$=\left\{x:<c,x>=\lambda\right\}$ называют опорной (локально опорной) в граничной точке x^0 множества G, если для всех $x \in G$ (некоторой окрестности $U(x^0)$ точки x^0) выполняется неравенство $\left\{x:<c,x>\le\lambda,<c,x^0>=\lambda\right\}$ $\quad (x \in G \cap U(x_0))$.

Определение. Область $D \subset R^n$ называют выпуклой (локально выпуклой), если для каждой граничной точки $x^0 \in \partial D$ существует опорная (локально опорная) гиперплоскость.

Определение. Область $D \subset R^n$ называют строго выпуклой (локально строго выпуклой), если для каждой граничной точки $x^0 \in \partial D$ существует опорная (локально опорная) гиперплоскость, имеющая с границей области ∂D только одну общую точку x^0.

Теорема 1. Локально выпуклая (строго локально выпуклая) область $D \subset R^n$ является и выпуклой (строго выпуклой) областью.

Определение. Область $D=\left\{x:\varphi(x)<0\right\}$ называют регулярной, если существует функция $\varphi(x)\in C^{(2)}$ в окрестности границы $U(\partial D)$ и $grad\,\varphi \ne \bar{0}$ на ∂D.

Теорема 2. Пусть область $D=\left\{x \in R^n, \varphi(x)<0\right\}$ регулярная и такова, что для каждой граничной точки $x^0 \in \partial D$ квадратичная форма $\omega(\varphi,x^0,\bar{a})=\sum\limits_{i,j=1}^{u}\dfrac{\partial^2\varphi\,(x^0)}{\partial x_i\,dx_j}a_i\,a_j>0$ для касательных векторов $\bar{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, определенных условием $<grad\,\varphi,\bar{a}>=0$, $\bar{a}\ne\bar{0}$. Тогда область D строго выпукла.

Определение. Действительную функцию $\varphi(x)\in C^{(2)}$ называют выпуклой в области D, если в этой области выполняется неравенство $\omega(\varphi,x,\bar{a})=\sum\limits_{i,j=1}^{u}\dfrac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}a_i\,a_j \ge 0$ для $\forall\,\bar{a}\in R^n$.

Обозначим через $\Pi(x_0)=\left\{\bar{a}\in R^n, <grad\;\varphi(x^0),\bar{a}>=0\right\}$, $\delta(x,A)=\inf\left|x-y\right|,(y\in A)$ расстояние от точки x до множества $A \subset R^n$.

Теорема 3. Область $D \in R^n$ выпукла, если функция $-\ln(\delta(x,\partial D))$ выпукла в пограничной полосе $D \cap U(\partial D)$, где $U(\partial D)$ – некоторая окрестность границы ∂D.

Доказательство можно построить аналогично доказательству псевдовыпуклости в [1].

Теорема 4([2]). Пусть область $D=\left\{x\in R^n:\varphi(x)<0\right\}$ такова, что $\varphi \in C^{(3)}$ в окрестности $\bar{D}$, $grad\,\varphi \ne 0$ на ∂D. Тогда область D выпукла тогда и только тогда, когда для каждой точки $x^0 \in \partial D$ $\quad \omega(\varphi,x^0,\bar{a})\ge 0$ для всех $\bar{a}\in \Pi(x^0)$.

Доказательство имеется в [2], при этом используются идеи из [3]. Отметим также, что для псевдовыпуклых областей в C^n аналогичное условие было получено Бремерманом в 1959 г.

Теорема 5. Знак формы $\omega(\varphi,x^0,\bar{a})$ для векторов $a \in \Pi(x^0)$ инвариантен относительно функции φ, задающей регулярную область $D=\left\{x:\varphi(x)<0\right\}$.

Для теорем 2 и 4 рассмотрим случай двух переменных.

Теорема 6. Для того чтобы регулярная область $D=\left\{x\in R^2, \varphi(x_1,x_2)\right\}<0$ была строго выпуклой, достаточно, чтобы всюду на ∂D выполнялось неравенство ($grad\,\varphi\neq 0$ на ∂D)

$$\Delta(\varphi)>0\text{, где }\Delta(\varphi)=-\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}.$$

Теорема 7. Для того чтобы регулярная область $D=\left\{x\in R^2, \varphi(x_1,x_2)<0\right\}$ была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы всюду на ∂D $\Delta(\varphi)\geq 0$.

Пример 1. $D=\left\{x\in R^2: x_1^2+x_2^2<1\right\}$,

$\varphi(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$,

$\Delta(\varphi)=8(x_1^2+x_2^2)>0,\ x\neq 0$. Поэтому эта область строго выпукла.

Пример 2.

$D=\left\{x\in R^2: x_1^{1/2}+x_2^{1/2}<1\right\}\quad x_1>0,\ x_2>0$,

$$\Delta(\varphi)=-\frac{1}{16\sqrt{x_1x_2}}\left(\frac{1}{x_2\sqrt{x_1}}+\frac{1}{x_1\sqrt{x_2}}\right)<0.$$

Поэтому область D не является выпуклой.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=x_n-f(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

Тогда $\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}a_ia_j=-\sum\limits_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,x_j}a_ia_j$,

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}a_i=0\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}a_i=a_n$

(для $n=2$ имеем $x_2-f(x_1)=\varphi(x_1,x_2)$),

$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=-\frac{df}{dx_1};\ \frac{d\varphi}{\partial x_2}=1$,

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=-\frac{d^2f}{d\,x_1^2};\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=0$,

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}=0$

$$\text{и тогда }\Delta(\varphi)=-\begin{vmatrix} 0 & -\frac{df}{dx_1} & 1 \\ -\frac{df}{dx_1} & -\frac{d^2f}{dx_1^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-\frac{d^2f}{dx_1^2},$$

$$\Delta(\varphi)=\frac{-d^2f}{dx_1^2}\geq 0\ \Rightarrow\frac{d^2f}{dx_1^2}\leq 0.$$

Таким образом, можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 8. Пусть в некоторой окрестности точки M^0 возможного локального экстремума функция $y=f(x),\ x\in R^n$, дважды непрерывно дифференцируема. Тогда, если в этой точке имеет место квадратичное неравенство $\omega(f,M^0,\bar{a})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(M^0)}{\partial x_i\partial x_j}a_ia_j<0$ для любых векторов $\bar{a}\neq\bar{0}$, то в этой точке функция имеет локальный максимум.

Если $\omega(f,M^0,\bar{a})>0$ для $\forall\bar{a}\neq 0$, то в этой точке функция имеет локальный минимум.

Отметим, что эта теорема известна в ТФМП, так как второй дифференциал d^2f есть квадратичная форма $d^2f=\sum\limits_{\partial,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j$ дифференциалов $dxk,\ k=1,2,\ldots,n$.

Теорема 9. Для того чтобы дважды дифференцируемая функция $y=f(x)$ в точке локального экстремума M^0 имела локальный максимум (минимум), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности $U(M^0)$ выполнялось неравенство $\omega(f,M^0,\bar{a})\leq 0$ $(\omega(f,M^0,\bar{a})\geq 0)$ для любых векторов $\bar{a}\in R^n$.

Для случая функции $y=f(x),x\in R^1$ имеет место следующая теорема.

Теорема 10. Для того чтобы функция $y=f(x)\in C^{(2)}$ в точке возможного локального экстремума M^0 имела локальный максимум (минимум), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности $U(M^0)$ выполнялось неравенство $\frac{d^2f(M^0)}{dx^2}\leq 0$ $\left(\frac{d^2f(M)}{dx^2}\geq 0\right)$.

Отметим, что в этих теоремах пришлось «выйти» в окрестность стационарной точки.

Далее рассмотрим аналитическое условие гиперплоскости. Поставим следующую задачу: охарактеризовать гиперповерхность $\{\varphi(x)=0\},\ x\in R^n$, на которую наложены условия:

$\sum\limits_{\partial,j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\partial x_j}=0$,

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}a_i=0$ (*)

для любых $\bar{a}\in R^n$, т. е. $a\in\Pi(x)$ в любой точке гиперповерхности.

Решением задачи является следующая теорема.

Теорема 11. Регулярная гиперповерхность $\{\varphi(x)=0\}$ в R^n будет гиперплоскостью тогда и только тогда, когда для любой ее точки будут справедливы условия (*).

Мы знаем два доказательства этой теоремы. Для $x \in R^2$ имеет место следующая теорема.

Теорема 12. Для того чтобы регулярная гиперповерхность $D = \left\{ x \in R^2, \varphi(x_1, x_2) < 0 \right\}$ была гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы всюду на ней $\Delta(\varphi) = 0$.

Рассмотрим поверхности уровня выпуклой функции $C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = -C + f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Это уравнение задает поверхность в пространстве R^n, которая ограничивает область $D = \left\{ x \in R^n, \varphi(x) < 0 \right\}$. Эта область будет выпуклой, так как на ∂D выполняется условие $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j \geq 0$ для $\forall \bar{a} \in R^n$ (см. теорему 4).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 13. Поверхность уровня выпуклой функции ограничивает выпуклую область. Введем более широкий класс квазивыпуклых функций, для которых данное свойство также имеет место.

Определение. Функция $y = f(x)$, $x \in R^n$, $f(x) \in C^{(2)}$ называется квазивыпуклой в *D*, если в области *D* выполняется неравенство $\omega(f, M^0, \bar{a}) \geq 0$ для векторов $\bar{a} \in \Pi(M)$.

Теорема 14. Выпуклая функция является квазивыпуклой функцией.

Учитывая теорему 4, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 15. Поверхность уровня квазивыпуклой функции ограничивает выпуклую область.

Верна следующая обратная теорема.

Теорема 16. Если поверхность уровня некоторой функции класса $C^{(2)}$ ограничивает выпуклую область, то это квазивыпуклая функция.

Таким образом, выпуклость областей, ограниченных поверхностями уровня функций класса $f(x) \in C^{(2)}$, является геометрическим характеристическим свойством квазивыпуклых функций.

Список литературы

1. **Владимиров В.С.** Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964.

2. **Аронов А.М.**, **Зиновьев Б.С.** Об аналитических условиях обычной и линейной выпуклости областей с гладкими границами // Изв. вузов. Математика. – 1974. – №8 (147). – С. 11–15.

3. **Хермандер Л.** Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. – М.: Мир, 1968.

Зиновьев Борис Сергеевич,
Ивановский государственный энергетический университет,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.

Соколов Александр Борисович,
Ивановский государственный энергетический университет,
старший преподаватель кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.

Елкина Галина Михайловна,
Ивановский государственный энергетический университет,
доцент кафедры высшей математики,
телефон (4932) 26-97-62.